



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Órbitas estelares en potenciales galácticos con simetría axial

Autor/es

MIGUEL ALONSO ANGULO

Director/es

JOSÉ PABLO SALAS ILARRAZA

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

QUÍMICA

Curso académico

2019-20



Órbitas estelares en potenciales galácticos con simetría axial, de MIGUEL
ALONSO ANGULO

(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative
Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.

Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los
titulares del copyright.

© El autor, 2020

© Universidad de La Rioja, 2020

publicaciones.unirioja.es

E-mail: publicaciones@unirioja.es



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Órbitas estelares en potenciales galácticos con simetría axial

Stellar orbits in galactic potentials with axial symmetry

Realizado por:

Miguel Alonso Angulo

Tutelado por:

José Pablo Salas Ilazarra

Logroño, junio de 2020

Resumen

En este trabajo se va aplicar la mecánica Hamiltoniana para estudiar el movimiento de estrellas en galaxias. Para ello se comenzará dando una introducción a dicha mecánica. Después usaremos esta mecánica para estudiar la dinámica de una estrella en el campo promedio creado por el resto de su galaxia. Nos ceñiremos a potenciales de tipo logarítmico con simetría axial.

Tras comentar las propiedades de diferentes tipos de potenciales galácticos, se tratará el caso del potencial logarítmico mediante un estudio analítico de los modos normales de sus órbitas, de su estructura de espacio de fases mediante secciones de Pointcaré y de las diferentes familias de órbitas existentes. También se desarrollará un código para la integración numérica de las ecuaciones del movimiento y para el cálculo de secciones de Poincaré.

Abstract

In this work, Hamiltonian mechanics will be applied to study the motion of stars in galaxies. To do this, we will begin by giving an introduction to said mechanics. Then we will use this mechanic to study the dynamics of a star in the average field created by the rest of its galaxy. We will focus to logarithmic potentials with axial symmetry.

After commenting on the properties of different types of galactic potentials, the case of the logarithmic potential will be treated through an analytical study of the normal modes of their orbits, their phase space structure using Pointcaré sections and the different families of existing orbits. A code will also be developed for the numerical integration of the equations of motion and for the calculation of Poincaré sections..

Índice general

1. Preámbulo	1
2. Introducción a la mecánica Hamiltoniana	3
2.1. Sistemas dinámicos	3
2.1.1. Integrabilidad	4
2.1.2. Espacio de fases	4
2.2. El principio fundamental de la dinámica	5
2.2.1. Sistemas ideales	7
2.2.2. Funcionales y cálculo de variaciones	7
2.2.3. El Principio de Hamilton	9
2.2.4. Ecuaciones de Hamilton	9
2.3. Tipos de movimiento	11
2.3.1. Movimiento regular	11
2.3.2. Movimiento caótico	11
3. Mecánica hamiltoniana en el movimiento de estrellas en galaxias	13
3.1. Descripción del movimiento	13
3.1.1. Órbitas en potenciales centrales estáticos	14
3.1.2. Órbitas en potenciales con simetría axial	18
3.2. Secciones de Poincaré	21
3.3. Potencial logarítmico con simetría axial	22
4. Dinámica estelar en un potencial logarítmico con simetría axial	25
4.1. Adimensionalización del hamiltoniano con potencial logarítmico	25
4.2. Estudio analítico de los modos normales de las órbitas	28
4.3. Estudio numérico de la estructura del espacio de fases	30
4.3.1. Tipos de órbitas periódicas	30
4.3.2. Aparición del caos	34

5. Conclusiones	39
Bibliografía	42
A. Teorema de Liouville-Arnold	43
B. Orbitas cuasiperiódicas en un toro T^n	45
C. Otros potenciales con simetría axial	47
C.1. Potenciales en discos finos	47
C.2. Potenciales en sistemas aplanados	48

1. Preámbulo

Antes de adentrarnos en la introducción a la mecánica Hamiltoniana y su aplicación al movimiento de estrellas en galaxias que desarrollaremos a lo largo de este trabajo, vamos a contextualizar estos conceptos mediante un breve vistazo a la historia de su desarrollo. [9] Y es que, la dinámica (descripción matemática del movimiento) ha estado relegada casi exclusivamente a la reflexión teórica hasta principios de la era moderna, donde se le ha podido dar una visión más experimental gracias al uso de ordenadores.

En 1687, Isaac Newton publica su obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica* [8]. Donde sienta las bases de todo el desarrollo posterior de la cosmología gracias a sus tres leyes del movimiento y a su ley de gravitación universal. Se debería esperar al siguiente siglo para que se aplicará una forma matemática a su mecánica. Siendo Leonhard Euler, fundador de la mecánica analítica, uno de sus principales contribuidores al ser el primero en escribir la segunda ley de Newton en forma de ecuación diferencial:

$$F = ma.$$

En 1743, Jean le Rond D'Alembert en su *Traité de Dynamique* [3] propone el actualmente llamado Principio de D'Alembert que permite estudiar sistemas difícilmente tratables por el método newtoniano al tener ligaduras. Un año más tarde, Pierre Louis de Maupertuis presenta el Principio de mínima acción. Principio que Euler utilizó en su *Methodus inveniendi líneas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* [4] para la creación de diversos procedimientos que permitían la resolución de problemas mecánicos. A su vez, Joseph-Louis de Lagrange desarrolla el cálculo de variaciones perfeccionando de esta manera el principio de mínima acción.

William Rowan Hamilton, recogiendo los conceptos de la mecánica lagrangiana, desarrolló su teoría de los sistemas Hamiltonianos y la llamada

ecuación de Hamilton. Esto hizo que se diera un gran paso hacia la teoría del movimiento que se utiliza actualmente. Lo que ocasionó que apareciera la idea de que el movimiento estaba completamente comprendido. Pero se fue viendo a final del siglo XIX, gracias principalmente a Henri Poincaré, que esta idea era incorrecta ya que no era posible encontrar soluciones válidas de las ecuaciones de sistemas genéricos para todo tiempo.

Son reseñables las aportaciones que se han ido realizando a estas teorías en los últimos años. Como se puede ver, por ejemplo, en los potenciales con simetría axial desarrollados por Toomre [11], Satoh o Binney-Tremaine [14] a finales del siglo XX.

Por último mencionar que como ya hemos comentado, el movimiento genérico es más complejo que lo que se creía. Lo que da lugar a situaciones de lo que llamamos movimiento irregular o caótico. Cuyo actual estudio está creando nuevas perspectivas sobre la mecánica celeste.

2. Introducción a la mecánica Hamiltoniana

Los *sistemas mecánicos* se definen como los conjuntos de objetos materiales o conceptuales cuyo estado se caracteriza por un conjunto de variables $\{x_k\}$ entre las que existen relaciones matemáticas, denominadas *leyes/ecuaciones de movimiento/evolución*.

El objeto de la dinámica es el estudio de dichos sistemas mecánicos y la determinación de la evolución temporal de sus variables mediante funciones $\{x_k(t)\}$. Para ello se establecen sus ecuaciones de evolución (ecuaciones del movimiento) y se resuelven.

Para el desarrollo de este capítulo tomaremos como referencia el libro *Dinámica clásica* de Antonio Rañada [9].

2.1. Sistemas dinámicos

Un *sistema dinámico de orden n* es un conjunto de elementos cuyo estado se define por n variables dependientes del tiempo $x_k(t)$ que obedecen las ecuaciones de movimiento

$$\frac{dx_k}{dt} \equiv \dot{x}_k = u_k(x_1, \dots, x_n, t), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

donde las u_k son n funciones dadas. También se suele denominar *sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas*, ya que incluyen como caso particular a las ecuaciones diferenciales de orden n de la forma

$$x^{(n)} + f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t) = 0, \quad \left(x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k} \right) \quad (2.2)$$

al definir $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, \dots , $x_n = x^{(n-1)}$ y tomando las ecuaciones de movimiento

$$u_k = x_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

$$u_n = -f.$$

Si $u_k(x_1, \dots, x_n, t) = u_k(x_1, \dots, x_n)$, es decir, las u_k no dependen del tiempo explícitamente, el sistema se denomina *autónomo*.

En algunos casos, podemos disponer de funciones de x_1, \dots, x_n llamadas *integrales primeras* o *constantes del movimiento* que son constantes en el tiempo, es decir, funciones $F(x_1, \dots, x_n)$ tal que si $x_1(t), \dots, x_n(t)$ es una solución del sistema dinámico,

$$F(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \text{constante}, \quad \forall t.$$

2.1.1. Integrabilidad

Un sistema se dice *integrable* cuando su solución se puede expresar mediante integrales de funciones conocidas y sus inversas.

En el caso particular de sistemas de primer orden autónomos, la solución se puede escribir mediante la integral

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{u(x)} \quad (2.3)$$

donde $x_0 = x(t_0)$ es el valor de la coordenada en el instante inicial t_0 .

Como ampliación a este apartado comentar que el teorema de Liouville-Arnold afirma que un sistema de orden n es integrable si posee n constantes de movimiento en involución mutua (ver Anexo A).

2.1.2. Espacio de fases

Cada (x_1, \dots, x_n) puede considerarse como las coordenadas de un punto en un espacio denominado *espacio de fases* y representan cada uno de los posibles estados del sistema.

Cada solución $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ define una curva en dicho espacio de fases y el vector $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ es tangente a dichas curvas, pues representa la velocidad con la que se mueve en el espacio el punto (x_1, \dots, x_n) . Cuando se representa el espacio de fases junto al campo vectorial \vec{u} se denomina *diagrama de fases*.

Los puntos en los que se anula el campo vectorial u se denominan *puntos de equilibrio* o *puntos fijos*. Sea $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ el vector de estado

del sistema y x_0 tal que $\vec{u}(x_0) = 0$, estos puntos se pueden clasificar en estables e inestables:

- Un punto x_0 es *estable* si, dado cualquier entorno suyo E_2 , existe otro entorno E_1 contenido en E_2 , tal que si $\vec{x}(0) \in E_1 \Rightarrow \vec{x}(t) \in E_2, \forall t > 0$.
- Un punto x_0 es *asintóticamente estable* o *atractor* si existe un entorno suyo E tal que si $\vec{x}(0) \in E$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = x_0$.
- Un punto es *inestable* cuando no es estable.

2.2. El principio fundamental de la dinámica

Se puede determinar la posición de todas las partículas de un sistema mecánico dando las $3N$ coordenadas cartesianas $\vec{r} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ con $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ de sus N partículas. Sin embargo, en numerosas ocasiones no suele ser la forma más aconsejable de proceder. Por este motivo, a partir de este punto, se trabajará con un conjunto de m cantidades independientes q_1, \dots, q_m cualesquiera (longitudes, ángulos o magnitudes de cualquier tipo) llamadas *coordenadas generalizadas*, tales que su determinación fije completamente la posición en el espacio de todas las partículas del sistema.

A la hora de establecer una relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas generalizadas nos encontramos con el concepto de *ligaduras holónomas* (condiciones sobre movimiento de un sistema sujetas a restricciones independientes de las fuerzas actuantes que pueden escribirse como una ecuación en función de las coordenadas) que definen, matemáticamente, una superficie o una curva en el espacio \mathbb{R}^{3N} en la que están restringidas las partículas:

$$S(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0.$$

Estas imponen relaciones entre las coordenadas que permiten escribir unas en función de otras. Lo que hace que exista un sistema de coordenadas, en el que en estas las fuerzas de ligadura se eliminan. De tal manera que, en un sistema sometido a l ligaduras holónomas, este tendrá $m = 3N - l$ coordenadas generalizadas. [5]

Se puede pasar de unas coordenadas a otras mediante relaciones funcionales del tipo

$$q_k = q_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \quad (2.4)$$

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_1, \dots, q_m, t) \quad (2.5)$$

con $k = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, N$.

Se dice que las $\{q_k\}$ son un *sistema de coordenadas generalizadas* y que m es el *número de grados de libertad* del sistema.

El espacio de m dimensiones con coordenadas (q_1, \dots, q_m) , en el que cada posición del sistema se representa por un punto, se denomina *espacio de configuración*. Como ya se ha mencionado anteriormente el objetivo de la dinámica es la determinación de la evolución temporal de las m funciones $q_k(t)$ que determinan el sistema.

Se definen como *velocidades generalizadas* a las derivadas de las coordenadas (q_1, \dots, q_m) respecto al tiempo, es decir, como las cantidades \dot{q}_k . Si q_k es un ángulo, la velocidad se dice *angular*.

La *energía cinética* de un conjunto de N partículas es, por definición,

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad (2.6)$$

donde m_i y $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$ son, respectivamente, la masa y la velocidad expresada en coordenadas cartesianas de cada punto material del sistema. Como interesa la expresión de T en coordenadas generalizadas $\{q_k\}$, se sustituye en (2.6) la expresión

$$\dot{r}_i = \sum_{k=1}^m \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (2.7)$$

obtenida de 2.5. Dando este proceso como resultado

$$T = \sum_{r,s=1}^m \frac{1}{2} A_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s + \sum_{r=1}^m B_r \dot{q}_r + C, \quad (2.8)$$

$$A_{rs}(q, t) = \sum_{i=1}^N m_k \frac{\partial r_i}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_s}, \quad B_r(q, t) = \sum_{i=1}^N m_k \frac{\partial r_i}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

$$C(q, t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_k \left(\frac{\partial r_i}{\partial t} \right)^2.$$

En general, T es suma de tres términos ($T = T_2 + T_1 + T_0$): T_2 , cuadrático en las velocidades; T_1 , lineal en las velocidades; y T_0 , que no depende de ellas. Cuando $\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0$, $T = T_2$ y se dice que el sistema es *natural*.

2.2.1. Sistemas ideales

Sea A un sistema y B su entorno. Llamaremos *sistemas ideales* a los que pertenecen a una de las siguientes categorías:

- El sistema A está *aislado*, es decir, no hay interacciones entre A y B ($A|B$).
- El sistema A influye sobre su entorno B , es decir, las únicas acciones apreciables son las de A sobre B ($A \rightarrow B$).
- El sistema A está en el campo exterior producido por B , es decir, las únicas acciones apreciables son las de B sobre A ($A \leftarrow B$).

Los sistemas ideales plantean un nivel de dificultad bajo. Ya que, si \vec{q}_A y \vec{q}_B son las coordenadas generalizadas de los sistemas A y B , en los dos primeros casos se puede determinar \vec{q}_A sin tener en cuenta \vec{q}_B y en el tercer caso, como las funciones $q_B(t)$ se pueden determinar independientemente de A , se puede suponer que, al estudiar A , las $q_B(t)$ toman valores conocidos.

2.2.2. Funcionales y cálculo de variaciones

En este contexto, definiremos *funcional* como una función real en un espacio vectorial de funciones $V = \{q : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ tal que asigna a cada función $q(t) = (q_1(t), \dots, q_m(t)) \in V$ definida en un intervalo $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}$ un número de \mathbb{R} . [10]

$$A[q] : V \rightarrow \mathbb{R}$$

Las funcionales que nos interesan son las de tipo integral, definidas como:

$$A[q] = \int_{t_1}^{t_2} F(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (2.9)$$

suponiendo un cierto buen comportamiento en las funciones F y q .

El *cálculo de variaciones* es una rama de las matemáticas que se encarga de hallar los extremos (mínimos, máximos y puntos críticos) de funcionales continuas definidas, en este caso, sobre el espacio vectorial de funciones V . [13] De forma similar a como se define la variación de una función, se toma la *variación* δA de la funcional A como la parte de su incremento que es de primer orden en δq :

$$A[q + \delta q] - A[q] = \delta A + O(\delta q^2)$$

$$\begin{aligned}
\delta A &= \int_{t_1}^{t_2} (F(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t), t) - F(q(t), \dot{q}(t), t)) dt + O(\delta q^2) = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt + O(\delta q^2).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Un punto de A se dice *estacionario* si se cumple que $\delta A = 0$.

Teorema 2.1. *La condición $\delta A = 0$ es equivalente a la ecuación de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \tag{2.11}$$

si se restringe a variaciones que se anulen en los extremos del intervalo de integración ($\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$).

Demostración. De la condición $\delta A = 0$ y de (2.10) se sigue que

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0$$

salvo términos de segundo orden en δq . Usando que $\delta(\dot{q}) = \frac{d}{dt} \delta q$, el segundo término se puede integrar por partes

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \cdot dt = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \cdot dt.$$

En el cual también se anula el primer sumando de la derecha por la condición $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, de modo que

$$\delta A = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial F}{\partial q} \right) \delta q \cdot dt = 0$$

La única forma de que esta integral sea igual a cero para todas las variaciones δq es que se anule el paréntesis, lo que conduce a (2.11). Recíprocamente, la ecuación de Euler-Lagrange implica $\delta A = 0$. \square

En general, las *ecuaciones de Euler-Lagrange* se definirán como las condiciones

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.} \tag{2.12}$$

2.2.3. El Principio de Hamilton

El *Principio de Hamilton*, Principio de Mínima Acción o *Principio Fundamental de la Dinámica* dice que a todo sistema ideal de m grados de libertad con coordenadas generalizadas $\vec{q} = (q_1(t), \dots, q_m(t))$, le corresponde una función $\Phi(q, \dot{q}, t)$, llamada *potencial*, que describe las interacciones y caracteriza y determina el movimiento tal que:

Cuando el sistema va desde la configuración $q(t = t_1)$ en $t = t_1$ hasta $q(t = t_2)$ en $t = t_2$, lo hace de modo que, siendo $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - \Phi(q, \dot{q}, t)$ el Lagrangiano con $T(q, \dot{q}, t)$ la energía cinética, la llamada *integral de acción* S ,

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt,$$

toma un valor estacionario.

Este principio implica que se deben cumplir las ecuaciones de Euler-Lagrange (o ecuaciones de Lagrange) que se convierten en las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.13)$$

2.2.4. Ecuaciones de Hamilton

Definiremos *momento conjugado* de la variable q_k como

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}.$$

Las dimensiones de p_k son las de momento lineal si q_k es una longitud y de momento angular si q_k es un ángulo.

También denominaremos *coordenadas cíclicas/ignorables* a las coordenadas de las que no depende explícitamente el lagrangiano, es decir, q_k tal que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0.$$

Este tipo de coordenadas provocan que la correspondiente ecuación de Lagrange sea

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} p_k = 0,$$

por lo que el momento conjugado relacionado con una variable cíclica es una constante del movimiento.

El *hamiltoniano* o función hamiltoniana H se define como

$$H = \sum_{k=1}^m p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}. \quad (2.14)$$

Este cumple que su derivada respecto al tiempo, al tener en cuenta las ecuaciones de Lagrange, es igual a menos la derivada respecto al tiempo del Lagrangiano:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^m (\dot{p}_k \dot{q}_k + p_k \ddot{q}_k) - \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Por tanto, si \mathcal{L} no depende explícitamente del tiempo, H es una constante del movimiento y, como las ecuaciones tampoco dependen del tiempo, el sistema sería autónomo.

Cuando el sistema es natural ($T = T_2$), H es la suma de la energía cinética y el potencial. Es decir, H es la energía total del sistema $H = E = T + \Phi$. Si H no es natural, pero se conserva, entonces se denomina *integral de Jacobi* y no coincide con la energía total.

A partir del hamiltoniano H , las *ecuaciones del movimiento de Hamilton* o canónicas para n grados de libertad se calculan como

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.15)$$

Estas nos permiten definir un campo vectorial en el espacio de fases $(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m)$ de dimensión $2m$ como

$$\vec{u} = \Gamma \vec{\nabla} H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_m}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_m} \right) = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_m) \quad (2.16)$$

donde $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz simpléctica. De tal manera que \vec{u} es perpendicular a $\vec{\nabla} H$ y el movimiento no se “sale” de las curvas (H constante), lo que explica su conservación.

2.3. Tipos de movimiento

Como último punto en esta introducción a la mecánica Hamiltoniana, vamos a indicar algunas definiciones relacionadas con los tipos de movimiento en sistemas hamiltonianos continuos, es decir, los que se encuentran gobernados por ecuaciones diferenciales.

2.3.1. Movimiento regular

Un sistema presentará *movimiento regular* si es integrable, es decir, si el sistema con m grados de libertad tiene m constantes del movimiento que se encuentren en involución (ver Anexo A).

Dentro de los movimientos regulares diferenciaremos entre movimiento periódico y cuasiperiódico:

- Se dice que un sistema $q(t)$ tiene *movimiento periódico* o se ajusta a una órbita periódica si existe un cierto *período* $T > 0$ tal que

$$q(t) = q(t + T), \quad \forall t.$$

- Se dice que un sistema $q(t)$ tiene *movimiento cuasiperiódico* o se ajusta a una órbita cuasiperiódica si existen una sucesión de ciertos cuasiperíodos $T_i > 0$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ existe un i tal que

$$|q(t) - q(t + T_i)| < \varepsilon, \quad \forall t.$$

Las funciones resultantes de dichos sistemas se denominan *funciones cuasiperiódicas*. Además, la trayectoria en el espacio de fases de estas funciones cuasiperiódicas se encuentra en un toro τ (dicha afirmación se encuentra comentada para toros n -dimensionales en el Anexo B).

Las órbitas que no son cuasiperiódicas (y por ende, periódicas) se denominan *órbitas caóticas o irregulares*.

2.3.2. Movimiento caótico

Aunque no hay una definición única del fenómeno del caos, está muy asumido que el caos está relacionado con una alta sensibilidad a cambios en las condiciones iniciales del sistema (condiciones iniciales muy próximas acaban dando lugar a comportamientos exponencialmente diferentes). Esta característica claramente precisa de no-linealidad en las ecuaciones del

movimiento del sistema, pero la no-linealidad no provoca necesariamente la aparición de caos.

También se puede relacionar el caos con el número de constantes del movimiento. Ya que si un sistema de m grados libertad solo tiene k constantes del movimiento con $k < m$, el sistema puede llegar a tener un *movimiento caótico*.

En el caso del estudio que aquí se realiza, consideraremos que los sistemas dinámicos presentan un movimiento caótico cuando para $t \rightarrow \infty$ la trayectoria que sigue no es cuasiperiódica, sino que es aperiódica y acotada.

3. Mecánica hamiltoniana en el movimiento de estrellas en galaxias

La mayoría de las estrellas en galaxias como la nuestra (la Vía Láctea) se encuentran en una estructura aplanada, de aproximadamente simetría axial, conocida como *disco galáctico*. A lo largo de este capítulo vamos a estudiar el movimiento de las estrellas en el campo promedio de la galaxia en la que se sitúan. Para ello trataremos las propiedades de diferentes tipos de potenciales promedio que tienen simetría axial y nos acabaremos centrando únicamente en el caso de un potencial logarítmico.

Para el desarrollo de este capítulo tomaremos como referencia el libro *Galactic Dynamics: Second Edition* de J. Binney y S. Tremaine [14].

3.1. Descripción del movimiento

Para simplificar el movimiento, asumiremos que los campos gravitacionales de las galaxias son suaves (las pequeñas irregularidades solo suelen afectar a las órbitas de las estrellas tras numerosos tiempos de cruce) y, por tanto, no se tendrán en cuenta variaciones provocadas por estrellas individuales, cúmulos globulares, nubes moleculares, etc.

Bajo una formulación hamiltoniana del movimiento y en coordenadas cartesianas $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, cualquier órbita estelar traza una trayectoria en el espacio de fases de seis dimensiones en el cual sus coordenadas canónicas son la posición $\vec{r}(t)$ y el momento lineal $\vec{p}(t) = (p_x(t), p_y(t), p_z(t)) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}m$, siendo m la masa de la estrella.

Las *integrales del movimiento* $I(\vec{r}, \vec{p})$ se definen como funciones de las coordenadas del espacio de fases tal que son constantes a lo largo de una

órbita:

$$I(\vec{r}(t), \vec{p}(t)) = \text{constante}, \quad \forall t.$$

Las integrales del movimiento juegan un papel fundamental en la descripción del movimiento.

Aunque las expresiones analíticas de las integrales del movimiento no suelen poder hallarse, en algunos casos como los que comentaremos a continuación se pueden escribir con facilidad:

- En un sistema autónomo con cualquier potencial estático $\Phi(\vec{r})$, el Hamiltoniano $H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \Phi(\vec{r})$ es una constante del movimiento. Si además el sistema es natural, entonces H es igual a la energía del sistema E (las ligaduras no dependen del tiempo) y el Hamiltoniano es una integral del movimiento.
- En un potencial central, las tres componentes y el módulo del vector momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ constituyen cuatro integrales del movimiento.
- En un potencial con simetría axial, la componente del momento angular a lo largo del eje de simetría es siempre una integral del movimiento.

Como se acaba de atisbar en el párrafo anterior, en esta sección trataremos el movimiento en potenciales centrales estáticos y potenciales con simetría axial. Esto se debe a que los resultados obtenidos en los potenciales centrales estáticos nos servirán cuando comencemos a estudiar el comportamiento de las órbitas en campos más generales como los modelados con potenciales con simetría axial.

3.1.1. Órbitas en potenciales centrales estáticos

Comenzaremos considerando las órbitas a tratar en un campo gravitacional estático esféricamente simétrico. En este tipo de campos podemos simplificar el movimiento de una estrella mediante la ley de conservación del momento angular L .

Como es bien sabido, las fuerzas centrales se derivan como el menos gradiente del potencial $\Phi(\vec{r})$, siendo \vec{r} el vector posición de la partícula con respecto al centro del campo. Es decir, las fuerzas centrales $\vec{F}(\vec{r})$ se obtienen como:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(r) = -\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

Para calcular $\frac{d\vec{L}}{dt}$, vamos a tener en cuenta la segunda Ley de Newton. Esta dice que

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

Así que:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\vec{r} \times m \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right) = \\ &= m \vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{r} \times \left(-\frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} \right) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, \vec{L} es una constante del movimiento en un campo central.

De este modo como \vec{L} , es un vector perpendicular al plano definido por los vectores \vec{r} y \vec{p} , y \vec{L} es un vector constante, resulta que la estrella se mueve en un plano (llamado *plano orbital*) cuya orientación (o posición) permanece constante.

Gracias a este resultado, podemos usar simplemente coordenadas polares planas (r, ψ) con

$$\begin{cases} x = r \cos \psi \\ y = r \sin \psi, \end{cases}$$

para describir el movimiento de la estrella en dicho plano orbital:

Siendo T la energía cinética del sistema en coordenadas cartesianas (x, y) sobre el plano orbital, si la transformamos a coordenadas polares planas queda:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \psi - r \dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \psi + r \dot{\psi} \cos \psi \end{cases}$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + (r \dot{\psi})^2)$$

y, por tanto, el lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + (r \dot{\psi})^2) - \Phi(r),$$

donde $\Phi(r)$ es el potencial gravitacional central.

Obtenido el lagrangiano, las ecuaciones del movimiento del sistema quedan:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m(\ddot{r} - r \dot{\psi}^2) + \frac{d\Phi}{dr} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\psi}) = 0$$

De la segunda de las ecuaciones obtenemos que $mr^2 \dot{\psi} = \text{constante} \equiv L$ que es solamente la expresión del módulo del momento angular en las coordenadas polares planas consideradas.

Los momentos conjugados de las variables del sistema son:

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = mr^2 \dot{\psi} = L$$

y, por tanto, la energía E de la estrella es:

$$\boxed{E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + (r\dot{\psi})^2) + \Phi(r) \equiv \text{constante}} \quad (3.1)$$

El *período radial* T_r es el tiempo requerido para que la estrella viaje desde el *apocentro* (puntos de mayor distancia dentro de una órbita a su centro de atracción) al *pericentro* (puntos de menor distancia) y de regreso.

Usando que $mr^2 \dot{\psi} = L$ para eliminar ψ de la ecuación de la energía (3.1), llegamos a la siguiente expresión:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - \Phi(r)) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}. \quad (3.2)$$

Los signos positivo y negativo indican que la estrella se mueve alternativamente hacia el apocentro y hacia el pericentro.

Además, separando las variables e integrando en (3.2):

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \Phi(r)) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}}, \quad (3.3)$$

siendo r y r_0 las distancias en los tiempos t y t_0 , respectivamente. Teniendo en cuenta $d\psi = \frac{L}{mr^2} dt$ y (3.3) obtenemos:

$$\psi - \psi_0 = L \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - \Phi(r)) - \frac{L^2}{r^2}}}. \quad (3.4)$$

Estas fórmulas (3.3) y (3.4) dan la solución general del problema. La primera determina de forma implícita la distancia r en función del tiempo y la segunda define la relación que existe entre r y ψ (ecuación de la trayectoria).

Por tanto, asumiendo r_1 y r_2 los respectivos radios del pericentro y el apocentro, se deduce de la ecuación (3.3) que el período radial es:

$$T_r = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \Phi(r)) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}}.$$

Al transcurrir la estrella alternativamente del apocentro al pericentro, el *ángulo azimutal* ψ se incrementa en una cantidad

$$\Delta\psi = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\psi}{dr} dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{L}{mr^2} \frac{dt}{dr} dr.$$

Sustituyendo (3.3) en la ecuación anterior obtenemos que

$$\Delta\psi = 2L \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - \Phi(r)) - \frac{L^2}{r^2}}}.$$

Por tanto, el *período azimutal* es

$$T_\psi = \frac{2\pi}{|\Delta\psi|} T_r.$$

En general, $\frac{\Delta\psi}{2\pi}$ no será un número racional y, por tanto, la órbita no será cerrada; sino que esta se asemejará a una roseta y acabará pasando por todos los puntos de la corona circular generada por los dos radios r_1 y r_2 como se puede observar en el ejemplo ilustrado en la figura 3.1.

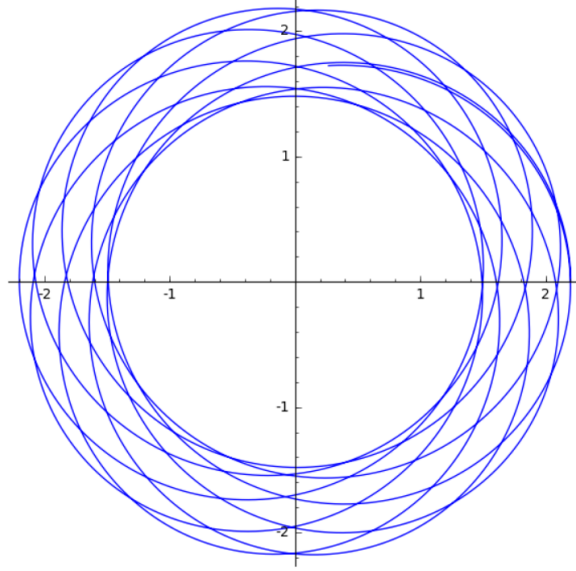


Figura 3.1: Órbita no cerrada en un potencial esférico isócrono (SageMath).

3.1.2. Órbitas en potenciales con simetría axial

En este apartado y en los siguientes estudios trataremos las órbitas que se dan en estrellas situadas en galaxias en las que su movimiento se ve descrito por potenciales con simetría axial. Para este tipo de galaxias usaremos coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z) con origen en el centro galáctico, de tal manera que el eje z coincidirá con el eje de simetría. De esta forma, las coordenadas cartesianas (x, y, z) de cualquier estrella se expresan como:

$$\begin{cases} x = R \cos \phi \\ y = R \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

Como hemos mencionado al comienzo de este capítulo, los resultados del apartado anterior nos sirven dentro de este otro tipo de potenciales; ya que en el caso particular del *plano ecuatorial* $(R, \phi, 0)$ de la galaxia, las órbitas de las estrellas que se encuentran en él describen el mismo movimiento que las estrellas en potenciales centrales.

Para el resto de estrellas cuyos movimientos se encuentran fuera del plano ecuatorial, reduciremos su estudio a un problema bidimensional gracias a la conservación de la componente z del momento angular L_z . Veamos cómo:

Sea $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ la energía cinética de la estrella, si la transformamos a coordenadas cilíndricas queda:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{R} \cos \phi - R \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{y} = \dot{R} \sin \phi + R \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{R}^2 + (R\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2)$$

En coordenadas cilíndricas el lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{R}^2 + (R\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2) - \Phi(R, z),$$

Como ya hemos señalado, Φ es un potencial con simetría axial, de forma que el ángulo ϕ no aparece en \mathcal{L} , es decir, ϕ es una variable cíclica.

Los momentos conjugados de las variables de dicho sistema son:

$$p_R = m\dot{R}$$

$$p_\phi = L_z = mR^2\dot{\phi}$$

$$p_z = m\dot{z}$$

donde p_ϕ es la componente z del momento angular. Usando las coordenadas R, ϕ, z y los momentos canónicos conjugados (p_R, p_ϕ, p_z) , el Hamiltoniano queda de la forma:

$$H = \frac{1}{2m}(p_R^2 + \frac{p_\phi^2}{R^2} + p_z^2) + \Phi(R, z). \quad (3.5)$$

Las ecuaciones del movimiento de Hamilton asociadas a (3.5) son:

$$\dot{R} = \frac{p_R}{m}; \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m}; \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\dot{p}_R = \frac{p_\phi^2}{mR^3} - \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} \quad (3.6)$$

$$\dot{p}_\phi = 0 \quad (3.7)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial z} \quad (3.8)$$

Se puede observar que la ecuación (3.7) expresa la conservación de p_ϕ mencionada con antelación. De este modo, podemos describir el movimiento en el plano (R, z) mediante las cuatro ecuaciones:

$$\dot{R} = \frac{p_R}{m}; \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}; \quad \dot{p}_R = \frac{p_\phi^2}{mR^3} - \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R}; \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial z}.$$

quedando la quinta ecuación $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mR^2}$ para describir la evolución temporal del ángulo ϕ y, por tanto, del propio plano orbital (R, z) .

Con estas afirmaciones, extraemos que el movimiento de una estrella en un potencial de simetría axial podemos reducirlo al movimiento bidimensional de la misma en el plano (R, z) bajo el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}(p_R^2 + p_z^2) + \Phi_{eff}(R, z)$$

con $\Phi_{eff}(R, z) = \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2mR^2}$ el potencial efectivo y $T_{eff} = \frac{1}{2m}(p_R^2 + p_z^2)$ la energía cinética del movimiento en el plano (R, z) . En la figura 3.2 se muestra un ejemplo del posible movimiento de una estrella en un potencial de simetría axial.

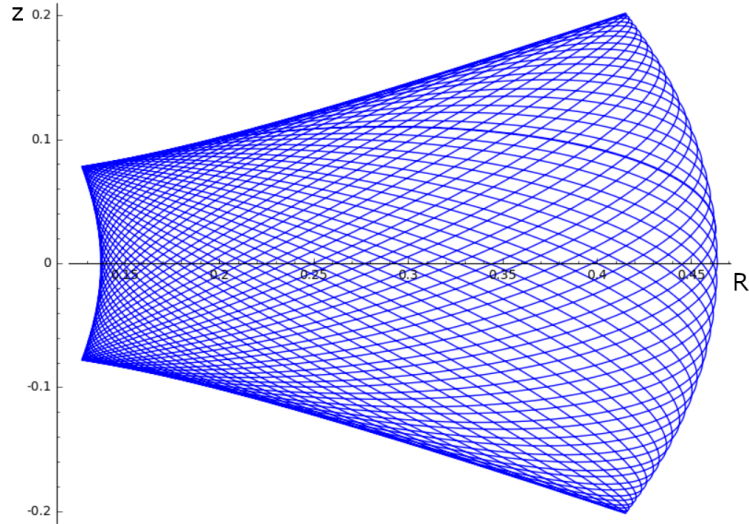


Figura 3.2: Órbita en un potencial efectivo experimentado por una estrella en una galaxia esferoidal achatada (SageMath).

Además, comentar que las ecuaciones

$$\dot{R} = \frac{p_R}{m}; \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}; \quad \dot{p}_R = -\frac{\partial \Phi_{eff}(R, z)}{\partial R}; \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial \Phi_{eff}(R, z)}{\partial z}$$

usualmente no se podrán resolver analíticamente; sino que seguiremos la evolución de (R, z, p_R, p_z) integrando las ecuaciones del movimiento numéricamente, para unas condiciones iniciales dadas.

El espacio de fase asociado con el sistema de dos grados de libertad que estamos considerando tiene por tanto cuatro dimensiones (R, z, p_R, p_z) y, debido, a la conservación de H , las trayectorias evolucionan en una variedad de dimensión tres en ese espacio de fases de dimensión cuatro.

3.2. Secciones de Poincaré

En esta sección vamos a proceder a definir rigurosamente las secciones de Poincaré y las aplicaciones de Poincaré tal y como se recoge en [7]. Estas nos permitirán visualizar la estructura de sistemas Hamiltonianos de dos grados de libertad, facilitándonos de esta manera poder estudiar la estructura de su espacio de fases.

Sea $\dot{x} = u(x)$ un sistema dinámico de orden n y $\phi(t, x) = \phi_t(x)$ su *flujo asociado* caracterizado por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, x) = u(\phi(t, x)), \quad \phi(0, x) = x.$$

Cuando este flujo este definido $\forall t \in \mathbb{R}$, entonces diremos que nos encontramos en un *campo completo* y $\phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ establecerá el difeomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^n) \\ t &\mapsto \phi_t \end{aligned}$$

que cumple la propiedad $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$, $\forall, s \in \mathbb{R}$.

Sea $p_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto regular ($u(p_0) \neq 0$) del campo vectorial anterior. Si consideramos

$$p_1 = \phi_1(T, p_0), \quad T \neq 0$$

otro punto de la órbita de p_0 (órbita que denotaremos como $\gamma(p_0) = \{\phi(t, p_0), t \in \mathbb{R}\}$) y también consideremos una sección Σ_1 transversal al campo u en p_1 , es decir. una subvariedad de dimensión $n - 1$ tal que $u(p_1) \notin T_{p_1}\Sigma_1 = \{p \in$

\mathbb{R}^n : $p = p_1 + v$, con $v \in \mathbb{R}^n$ y $\langle v, \nabla h \rangle = 0$; entonces podemos suponer que en un entorno U_1 de p_1 se cumple que

$$\Sigma_1 \cap U_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\},$$

con $h: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h'(x) \neq 0, x \in U_1$.

Si consideramos ahora la aplicación

$$(t, x) \mapsto h(\phi(t, x)),$$

entonces el teorema de la función implícita nos da entornos U_0 de p_0 , intervalos I de $[0, T]$ y una aplicación

$$\tau: U_0 \rightarrow I$$

tal que sobre $(t, x) \in I \times U_0$ tenemos que $\phi(t, x) \in \Sigma_1$ si, y sólo si, $t = \tau(x)$. En particular, $\tau(p_0) = T$.

La aplicación

$$x \in U_0 \mapsto P(x) = \phi(\tau(x), x) \in \Sigma_1$$

recibe el nombre de *aplicación de Poincaré*. Podemos observar que la aplicación así definida es constante sobre las órbitas.

De tal manera, que si dado un punto $p \in U_0$ definimos $O(p) = \{\phi(t, p) : \phi(s, p) \in U_0, \forall s \in [0, t]\}$, entonces se cumple que $P(x) = P(p), \forall x \in O(p)$. Si restringimos la aplicación de Poincaré a otra sección transversal Σ_0 con $p_0 \in \Sigma_0$ y dimensión $n - 1$:

$$P|_{\Sigma_0} : \Sigma_0 \cap U_0 \rightarrow \Sigma_1$$

y suponemos que $\{x \in \Sigma_0 : \phi(t, x) \in \Sigma_0, t \neq 0\} \neq \emptyset$, entonces se puede definir $\Sigma_1 = \Sigma_0$ y considerar la aplicación de Poincaré sobre esta sección (*sección de Poincaré*). Por tanto, las iteraciones P^n nos irán dando los puntos del flujo que se encuentran en dicha sección.

3.3. Potencial logarítmico con simetría axial

En general, todo potencial $\Phi(\vec{r})$ tiene asignado una distribución de densidad de masa $\rho(\vec{r})$ que se relaciona con $\Phi(\vec{r})$ mediante la *ecuación de Poisson*:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r}), \quad \text{con } \vec{r} = (x, y, z).$$

En un sistema aislado la condición de contorno necesaria para resolver está ecuación diferencial es $\Phi(\vec{r}) \rightarrow 0$ cuando $\vec{r} \rightarrow \infty$. Además, es interesante mencionar que, en el caso $\rho(\vec{r}) = 0$, se obtiene la *ecuación de Laplace* ($\nabla^2\Phi = 0$).

Integrando ambos lados de la ecuación de Poisson y aplicando el teorema de la divergencia podemos obtener el Teorema de Gauss:

Teorema 3.1. (de Gauss) *La integral de la componente normal de $\vec{\nabla}\Phi$ sobre cualquier superficie cerrada es igual a $4\pi G$ veces la masa M contenida dentro de esa superficie:*

$$\oint_S \vec{\nabla}\Phi(\vec{r})d\vec{S} = 4\pi GM.$$

En las galaxias espirales reales, las curvas de velocidad circular tienden a aparecer a radios grandes. Sin embargo, en los modelos que se presentan en el Anexo C la velocidad cae de forma kepleriana ya que tienen masa finita y esto representa un problema. Para corregir este problema, en el libro *Galactic Dynamics: Second Edition* de J. Binney y S. Tremaine [14] se propone el siguiente *potencial logarítmico*:

$$\Phi_{LB}(R, z) = \frac{v_0^2 m}{2} \ln \left(R_c^2 + R^2 + \frac{z^2}{q_\Phi^2} \right) + \text{constante}. \quad (3.9)$$

Donde R_c es el radio de las órbitas circulares en el plano ecuatorial $z = 0$ cuando $R \rightarrow \infty$ y v_0 es la velocidad de dichas órbitas circulares. La constante q_Φ es la relación del eje de las superficies equipotenciales (esferoides de ratio axial q_Φ bastante planos) y es un parámetro que gobierna la simetría del potencial.

Calculando el laplaciano en coordenadas cilíndricas de $\Phi_{LB}(R, z)$ obtenemos su distribución de densidad correspondiente:

$$\begin{aligned} \rho_{LB}(R, z) &= \frac{1}{4\pi G} \nabla^2 \Phi_{LB}(R, z) = \\ &= \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{LB}(R, z)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_{LB}(R, z)}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Phi_{LB}(R, z)}{\partial z^2} \right) = \\ &= \frac{v_0^2 m}{4\pi G q_\Phi^2} \frac{(2q_\Phi^2 + 1)(R_c^2 + R^2 + z^2 q_\Phi^{-2}) - 2(R^2 q_\Phi^2 + z^2 q_\Phi^{-2})}{(R_c^2 + R^2 + z^2 q_\Phi^{-2})^2}. \end{aligned}$$

Que se puede expresar como:

$$\rho_{LB}(R, z) = \frac{v_0^2 m}{4\pi G q_\Phi^2} \frac{(2q_\Phi^2 + 1)R_c^2 + R^2 + (2 - q_\Phi^{-2})z^2}{(R_c^2 + R^2 + z^2 q_\Phi^{-2})^2}.$$

Es sencillo observar que con R y z pequeños, $\rho_{LB}(R, z)$ tiende a un valor constante, y cuando R o $|z|$ es grande, $\rho_{LB}(R, z)$ se comporta como R^2 o z^2 .

Podemos calcular el mínimo valor de q_Φ para el que la distribución de densidad del potencial logarítmico $\rho_{LB}(R, z)$ se mantiene positiva:

$$\rho_{LB}(R, z) = \frac{v_0^2 m}{4\pi G q_\Phi^2} \frac{(2q_\Phi^2 + 1)R_c^2 + R^2 + (2 - q_\Phi^{-2})z^2}{(R_c^2 + R^2 + z^2 q_\Phi^{-2})^2} \geq 0.$$

Como m , G , R_c^2 y v_0^2 son siempre constantes positivas y $q, R, z \in \mathbb{R}$:

$$(2q_\Phi^2 + 1)R_c^2 + R^2 + (2 - q_\Phi^{-2})z^2 \geq 0.$$

Tomando el caso límite de la distribución de densidad en el eje z :

$$(2 - q_\Phi^{-2})z^2 \geq 0$$

$$q_\Phi^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Por tanto, el valor de q_Φ ha de cumplir que:

$$q_\Phi \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad \boxed{q_\Phi \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707}.$$

4. Dinámica estelar en un potencial logarítmico con simetría axial

Como ya hemos adelantado en capítulos anteriores vamos a centrarnos en el caso del potencial logarítmico con simetría axial para realizar un estudio analítico de los modos normales de las órbitas en una aproximación lineal cerca del mínimo del potencial y un estudio numérico de su estructura de espacio de fases mediante secciones de Poincaré que dará lugar a una clasificación de las diferentes familias de órbitas existentes.

Previamente a la realización ambos estudios, procederemos a adimensionalizar el Hamiltoniano para poder trabajar más fácilmente con él.

4.1. Adimensionalización del hamiltoniano con potencial logarítmico

Antes de comenzar a adimensionalización el hamiltoniano (3.5) lo expresaremos en coordenadas cartesianas:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Phi(x, y, z)$$

Teniendo en cuenta que el potencial logarítmico de Binney (3.9) en coordenadas cartesianas es de la forma:

$$\Phi_{LB}(x, y, z) = \frac{v_0^2 m}{2} \ln \left(R_c^2 + x^2 + y^2 + \frac{z^2}{q_\Phi^2} \right),$$

el Hamiltoniano queda:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{v_0^2 m}{2} \ln \left(R_c^2 + x^2 + y^2 + \frac{z^2}{q_\Phi^2} \right).$$

(4.1)

Para la realización de la adimensionalización, utilizaremos las coordenadas adimensionales (x', y', z') definidas como

$$x' = \frac{x}{R_c}; \quad y' = \frac{y}{R_c}; \quad z' = \frac{z}{R_c}. \quad (4.2)$$

También tendremos en cuenta las relaciones definidas por los momentos conjugados de las variables del sistema:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}; \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}; \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}.$$

Utilizando estas relaciones, podemos expresar (4.1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{v_0^2 m}{2} \ln \left(R_c^2 + R_c^2 x'^2 + R_c^2 y'^2 + \frac{R_c^2 z'^2}{q_\Phi^2} \right) = \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{v_0^2 m}{2} \ln \left(1 + x'^2 + y'^2 + \frac{z'^2}{q_\Phi^2} \right) + \frac{v_0^2 m}{2} \ln (R_c^2) = \end{aligned}$$

Tomando el valor constante $C_{R_c} = \frac{v_0^2 m}{2} \ln (R_c^2)$:

$$H = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{v_0^2 m}{2} \ln \left(1 + x'^2 + y'^2 + \frac{z'^2}{q_\Phi^2} \right) + C_{R_c}$$

Por último, derivando (4.2) sobre el tiempo obtenemos que

$$\dot{x} = R_c \frac{dx'}{dt}; \quad \frac{dy'}{dt} = R_c \dot{y}'; \quad \dot{z} = R_c \frac{dz'}{dt}$$

Y, por tanto, el Hamiltoniano queda de forma:

$$H = \frac{R_c^2 m}{2} \left(\left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt} \right)^2 \right) + \frac{v_0^2 m}{2} \ln \left(1 + x'^2 + y'^2 + \frac{z'^2}{q_\Phi^2} \right) + C_{R_c}.$$

A continuación, procedemos a adimensionalizar el tiempo y terminamos de adimensionalizar el Hamiltoniano. Sea $\tau = \frac{R_c}{v_0}$ un tiempo, entonces

$$t' = \frac{t}{\tau}$$

es un tiempo adimensional y, por tanto:

$$H = \frac{R_c^2 m}{2} \left(\left(\frac{dx'}{dt'} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'} \right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt'} \right)^2 \right) \frac{v_0^2}{R_c^2} + \frac{v_0^2 m}{2} \ln \left(1 + x'^2 + y'^2 + \frac{z'^2}{q_\Phi^2} \right) + C_{R_c}.$$

Eliminando R_c y tomando $H' = \frac{H}{mv_0^2}$, $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$, $v'_y = \frac{dy'}{dt'}$, $v'_z = \frac{dz'}{dt'}$ y $C'_{R_c} = \frac{C_{R_c}}{mv_0^2}$:

$$H' = \frac{1}{2}(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + x'^2 + y'^2 + \frac{z'^2}{q_\Phi^2} \right) + C'_{R_c}.$$

En último lugar, para simplificar la expresión eliminamos las primas y prescindimos del término constante C'_{R_c} :

$$H = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + x^2 + y^2 + \frac{z^2}{q_\Phi^2} \right) \equiv E \quad (4.3)$$

Es sencillo observar que los únicos parámetros de los que depende el Hamiltoniano adimensional son q_Φ y la energía E y que, además, las longitudes se miden en unidades de R_c y la energía en unidades de mv_0^2 .

Ahora, devolviendo hamiltoniano a coordenadas cilíndricas, tenemos que éste es de la siguiente forma:

$$H = \frac{1}{2}(p_R^2 + \frac{p_\phi^2}{R^2} + p_z^2) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + R^2 + \frac{z^2}{q_\Phi^2} \right)$$

Como hemos visto en capítulos anteriores, al ser ϕ una coordenada cíclica, $p_\phi = L_z$ es una constante del movimiento. Para simplificar, estudiaremos el caso particular $L_z = 0$, consiguiendo que las órbitas vivan en el semiplano (R, z) (ya que R solo puede tomar valores positivos). Por último y por motivos prácticos, definimos una nueva variable $U = \pm R$. Por tanto, el hamiltoniano queda de la forma:

$$H = \frac{1}{2}(p_U^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + U^2 + \frac{z^2}{q_\Phi^2} \right). \quad (4.4)$$

Y las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{U} = p_U; \quad \dot{z} = p_z; \quad \dot{p}_U = \frac{-U}{1 + U^2 + \frac{z^2}{q_\Phi^2}}; \quad \dot{p}_z = \frac{-z}{q_\Phi^2(1 + U^2) + z^2} \quad (4.5)$$

4.2. Estudio analítico de los modos normales de las órbitas

El potencial que acabamos de obtener $\Phi(U, z) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + U^2 + \frac{z^2}{q_\Phi^2} \right)$ no es armónico. Sin embargo, es interesante estudiar su aproximación armónica ya que nos dará idea de que tipo de movimiento nos vamos a encontrar cuando la energía del sistema sea muy pequeña. Para ello desarrollaremos el potencial en serie de Taylor hasta orden dos alrededor de su mínimo ($U = 0, z = 0$), ya que en ese punto se aproxima a un potencial armónico:

$$\begin{aligned} \Phi(U, z) &= \Phi(0, 0) + \Phi_U(0, 0)U + \Phi_z(0, 0)z + \frac{\Phi_{UU}(0, 0)}{2}U^2 + \\ &+ \Phi_{Uz}(0, 0)Uz + \frac{\Phi_{zz}(0, 0)}{2}z^2 + O(U^3) + O(z^3) = \\ &= \frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{2q_\Phi^2}z^2 + O(U^3) + O(z^3). \end{aligned}$$

El término de primer orden es cero ya que el origen es un mínimo. Por tanto, el primer término no nulo de la serie es el de segundo orden. Además, se observa que la forma cuadrática resultante es diagonal (no aparece el término bUz).

De tal manera, que los coeficientes que multiplican a U^2 y z^2 son las frecuencias al cuadrado de los modos normales (sin el $\frac{1}{2}$):

$$\Omega_U = 1; \quad \Omega_z = \frac{1}{q}.$$

Se observa que dichas frecuencias únicamente dependen de q_Φ y, por tanto, que cuando $q_\Phi = 1$ ambas frecuencias son iguales. Al tener una aproximación armónica, conseguimos desacoplar el movimiento en dos direcciones ortogonales. Esto provoca que el Hamiltoniano armónico se pueda separar en dos integrales del movimiento:

$$H = H_U + H_z.$$

$$H_U = \frac{1}{2}p_U^2 + \frac{1}{2}U^2; \quad H_z = \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{1}{2q_\Phi^2}z^2.$$

En la aproximación lineal, cuando calculamos las ecuaciones del movimiento quedarán las ecuaciones de un oscilador armónico:

$$\dot{U} = p_U; \quad \dot{z} = p_z; \quad \dot{p}_U = -U; \quad \dot{p}_z = -\frac{1}{q_\Phi^2}z,$$

que expresadas como ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden quedan:

$$\ddot{U} = -U; \quad \ddot{z} = -\frac{1}{q_\Phi^2}z$$

Las soluciones analíticas de estas ecuaciones del movimiento son órbitas lineales según el eje U y el eje z respectivamente y son los llamados *modos normales* de oscilación del sistema.

- Las soluciones del polinomio característico $P(r) = r^2 + 1 = 0$ de la primera ecuación diferencial son $r = \pm i = \pm \Omega_U i$. Así que la solución general de dicha ecuación diferencial es:

$$\boxed{U(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)}, \quad \text{con } C_1 \text{ y } C_2 \text{ constantes.}$$

- Las soluciones del polinomio característico $P(r) = r^2 + \frac{1}{q_\Phi^2} = 0$ de la segunda ecuación diferencial son $r = \pm \frac{1}{q_\Phi} i = \pm \Omega_z i$. Así que la solución general de dicha ecuación diferencial es:

$$\boxed{z(t) = K_1 \cos\left(\frac{t}{q_\Phi}\right) + K_2 \sin\left(\frac{t}{q_\Phi}\right)}, \quad \text{con } K_1 \text{ y } K_2 \text{ constantes.}$$

En la figura (4.1) se puede observar la órbita resultante que ofrecen los modos normales obtenidos anteriormente para las condiciones iniciales $\dot{U}(0) = 0.05$, $\dot{z}(0) = 0.05$, $U(0) = 0.025$, $z(0) = 0.025$ y $q_\Phi = 0.8$ (recordemos que $q_\Phi \geq 0.707$).

El margen de este tipo de aproximación es corto y solo sirve con órbitas con poca energía, es decir, acotadas a regiones cercanas al mínimo del potencial.

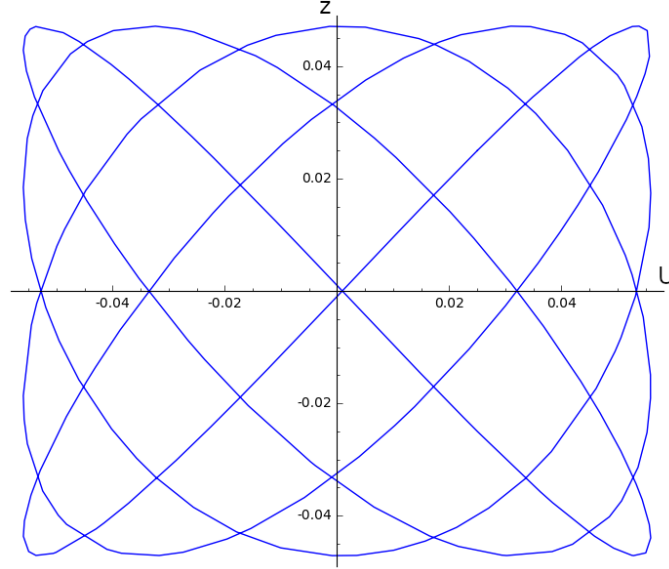


Figura 4.1: Aproximación de una órbita mediante el uso de modos normales (SageMath).

4.3. Estudio numérico de la estructura del espacio de fases

A lo largo de esta última sección, estudiaremos la estructura del espacio de fases de nuestro problema, la cual vendrá determinada por las diferentes órbitas periódicas que se pueden dar en el espacio de fases. También observaremos qué regiones del espacio de fases se ven más afectadas por el caos cuando la energía de las órbitas aumenta. Para ello haremos uso de las secciones de Poincaré tal como se comentaron en el capítulo anterior.

En el caso del estudio que vamos a realizar, tomaremos la sección de Poincaré definida por $z = 0$ con $p_z \geq 0$ y $q_\Phi = 0,8$ mientras que vamos variando la energía E . Las imágenes que muestran a lo largo de esta sección los resultados de dicho estudio han sido calculadas en Mathematica mediante la función NDSolve y su método EventLocator.

4.3.1. Tipos de órbitas periódicas

En primer lugar, analizaremos las diferentes familias de órbitas periódicas sobre secciones con $E > E_{min} = 0$ cuando aun no ha aparecido el caos.

Empezamos con una energía pequeña próxima al mínimo $E = 0.25$ (figura 4.2), de tal forma que es de esperar que el sistema tenga un comportamiento aproximadamente lineal.

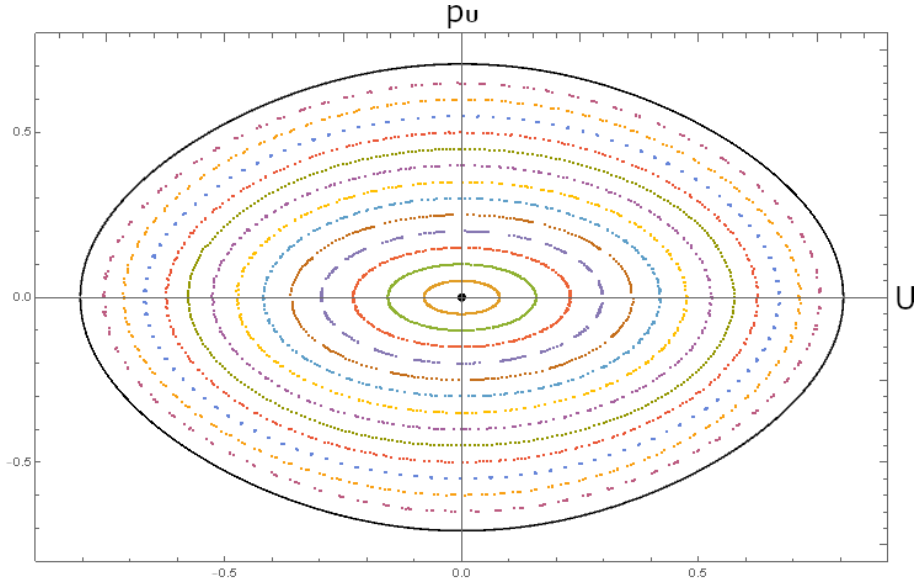


Figura 4.2: Sección $z = 0$ de varias órbitas con $E = 0.25$ (Mathematica).

En este tipo de sistemas, el espacio de fases está gobernado por dos tipos de órbitas periódicas:

- Una órbita periódica rectilínea según el eje U : Esta órbita estable corresponde con el punto fijo en el origen $(0, 0)$. Señalado como un punto de color negro en la figura 4.2.
- Una órbita periódica rectilínea según el eje z : Esta otra órbita estable corresponde con el límite de la sección y en la figura 4.2 se representa como la órbita de color negro. Está definida por

$$p_U^2 = 2(E - \Phi(U, 0)) = 2(E - \ln(1 + u^2))$$

ya que esta órbita es tangente al plano de Poincaré que hemos definido ($z = 0$).

Estos dos tipos de órbitas periódicas se corresponderían con los modos normales de oscilación obtenidos en la aproximación lineal de la sección anterior y nos indica que para $E = 0.25$ el sistema es aproximadamente integrable y separable.

Entre ambas órbitas periódicas nos encontramos una familia de órbitas cuasiperiódicas llamadas *órbitas caja* (en inglés *box orbits*) que son simétricas sobre el origen. En la figura 4.2, son las órbitas de colores diferentes al negro.

Estas órbitas tienen dos características principales que se pueden observar fácilmente en la figura 4.3:

- A lo largo del tiempo, una estrella en estas órbitas pasa de forma arbitraria cerca del centro del potencial.
- Las estrellas de estas órbitas no tienen un único sentido fijo de rotación en el centro ya que en la superficie de la sección son simétricas sobre el eje U .

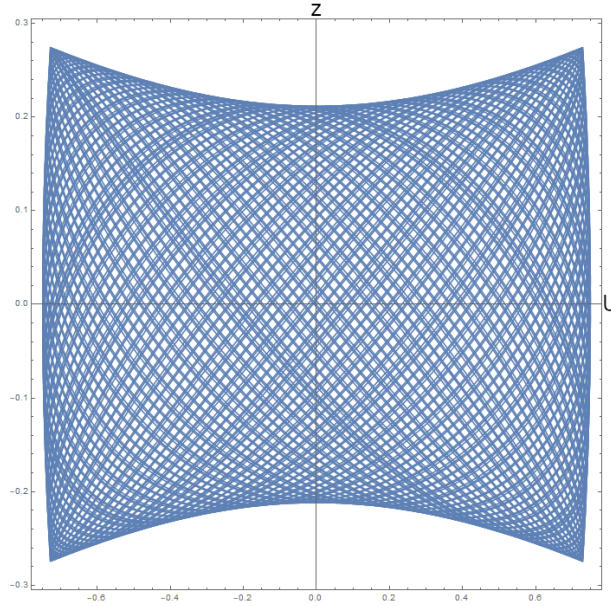


Figura 4.3: Órbita caja en el plano (U, z) con $E = 0.25$ que pasa por $U = 0.75$ y $p_U = 0$ (Mathematica).

Cuando aumentamos la energía, como se puede observar por ejemplo en la figura 4.4 con energía $E = 0.65$, la no linealidad del problema comienza a dominar la dinámica del sistema y se produce una *bifurcación de Pitchfork* o bifurcación tridente: De la órbita periódica estable situada en el origen surgen dos órbitas periódicas estables. De tal manera que la órbita periódica rectilínea según el eje U se convierte en inestable.

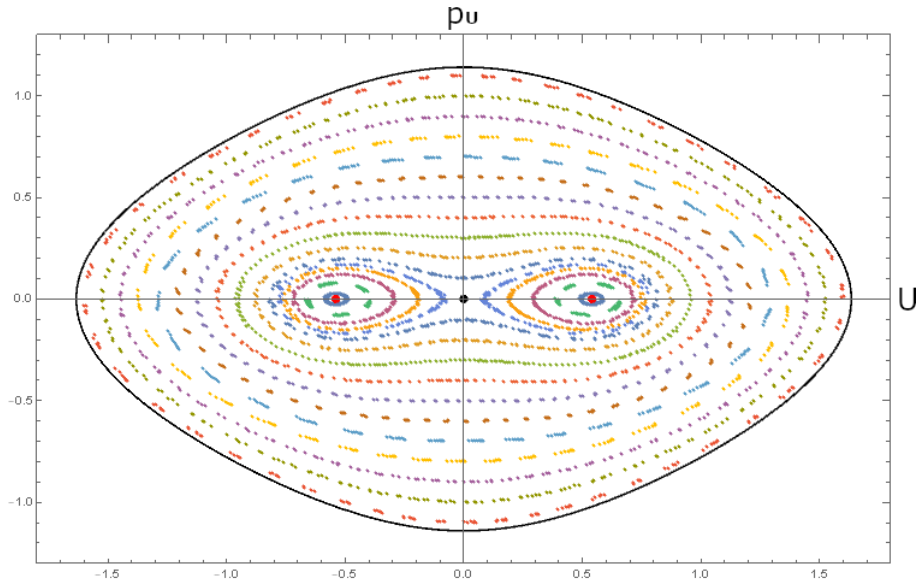


Figura 4.4: Sección $z = 0$ de varias órbitas con $E = 0.65$ (Mathematica).

Por tanto, ahora el espacio de fases estará gobernado por cuatro tipos de órbitas periódicas: Una órbita periódica rectilínea según el eje z , una órbita periódica rectilínea inestable según el eje U y dos órbitas periódicas estables (señaladas en la figura 4.4 con dos puntos de color rojo).

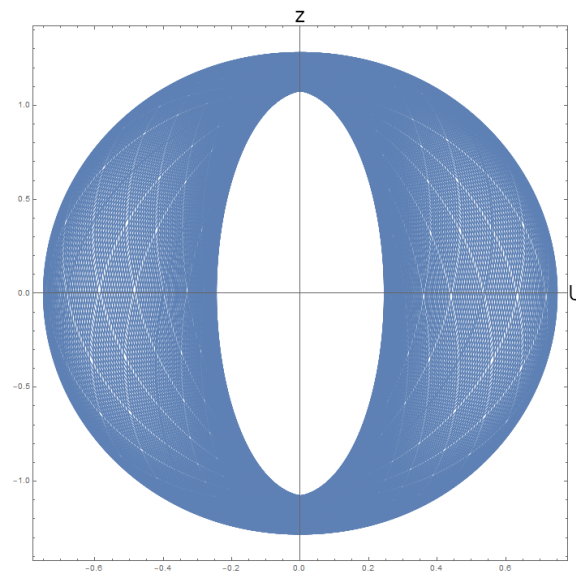


Figura 4.5: Órbita bucle en el plano (U, z) con $E = 0.65$ que pasa por $U = 0.75$ y $p_U = 0$ (Mathematica).

Aunque cerca del límite de la sección encontramos varias órbitas de tipo caja, podemos observar que junto a las dos nuevas órbitas periódicas estables hay un tipo de órbitas diferentes a esta. Esta familia de órbitas cuasiperiódicas se llama *órbitas bucle* (en inglés *loop orbits*).

A diferencia de las órbitas caja, las órbitas bucle tienen un sentido de rotación fijo en el centro: las órbitas que se encuentran en el punto de la izquierda giran en sentido antihorario y las que se encuentran en el punto de la derecha giran en sentido horario.

Se puede observar que existe una clara relación entre las órbitas periódicas y las familias de órbitas cuasiperiódicas. Con lo que las órbitas periódicas juegan un papel fundamental en el estudio del espacio de fases.

4.3.2. Aparición del caos

Si seguimos aumentando gradualmente la energía del sistema E y vamos calculando la sección de Poincaré $z = 0$ para cada una de ellas, podemos observar que parece que no se manifiesta el caos y que el modelo es integrable como se ejemplifica en las figuras 4.6. Esto, en cambio, no es cierto ya que, aunque el potencial logarítmico que estamos trabajando tiene muy poco caos, Magnenat en 1982 [2] consiguió encontrar cierta inestabilidad y caos con lo que demostró que no era integrable. Veámoslo más en detalle.

Si nos acercamos al punto $(0, 0)$ de la sección de Poincaré, vemos que para ciertos valores de energía (sub-figuras 4.7(d), 4.7(e) y 4.7(f)) las órbitas que pasan cerca del punto fijo inestable, sin necesidad de aumentar demasiado el tiempo, comienzan a crear una dispersión acotada alrededor del mismo. Es decir, existe un cierto caos alrededor de la separatriz que pasa por el punto fijo inestable situado en el origen. Aparece lo que se llama una *banda estocástica* (zona en la que el comportamiento no es determinista). Este caos en el origen del plano (U, p_U) está provocado por la ya mencionada no-linealidad del problema.

En las figuras 4.7 se muestra la evolución sobre la sección de Poincaré para diferentes energías, de cinco órbitas con condiciones iniciales cercanas al punto fijo inestable. Como se puede observar, el valor de la energía del sistema a partir del cual comienza a aparecer el caos parece ser aproximadamente $E \approx 1$. Ya que mientras que con $E = 1$ las órbitas aún mantienen su forma, con $E = 1.1$ las dos órbitas más cercanas a $(0, 0)$ se dispersan. Situación que se va agravando a medida que aumenta la energía.

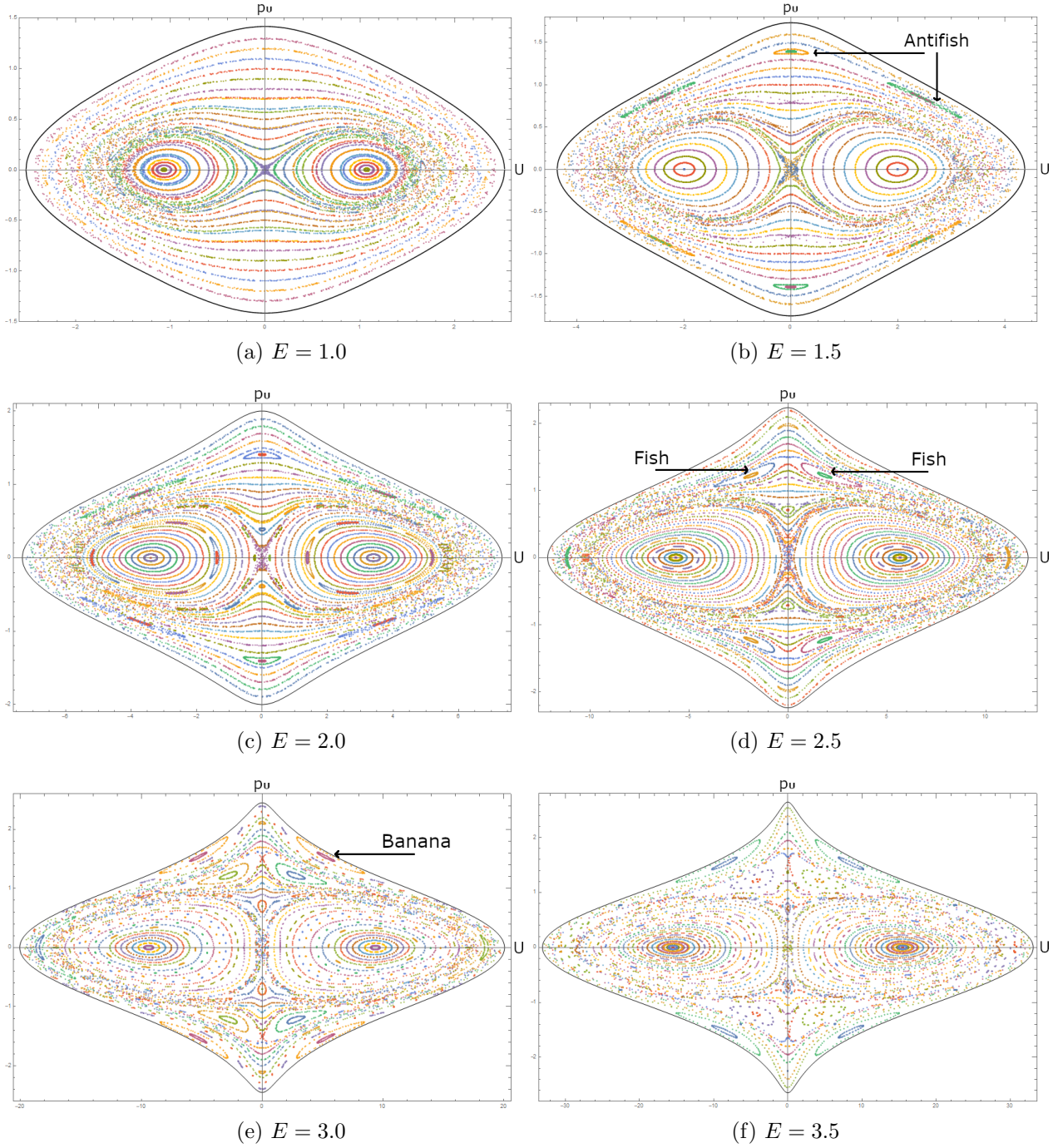


Figura 4.6: Secciones $z = 0$ de varias órbitas en diferentes valores de energía (Mathematica).

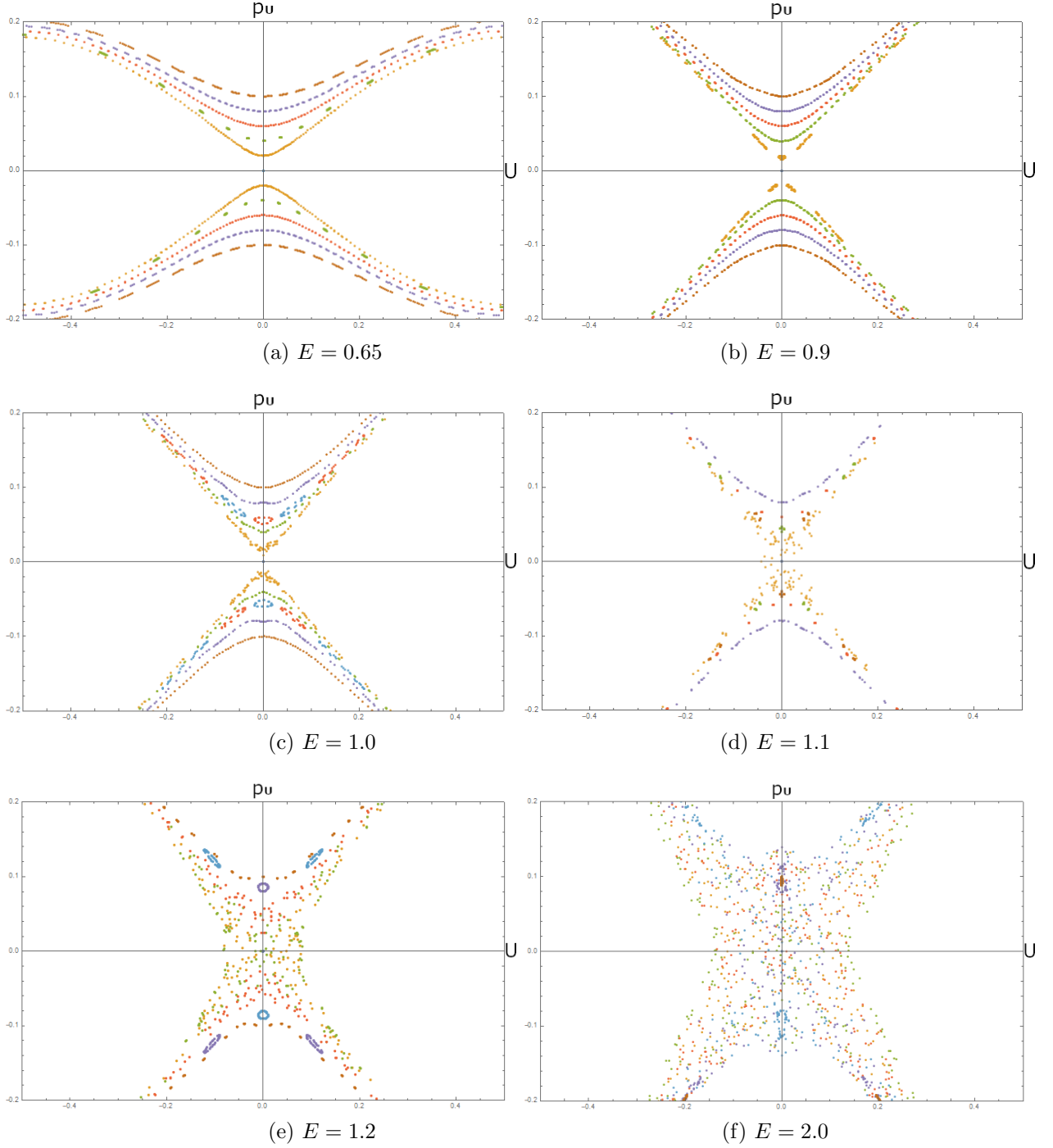
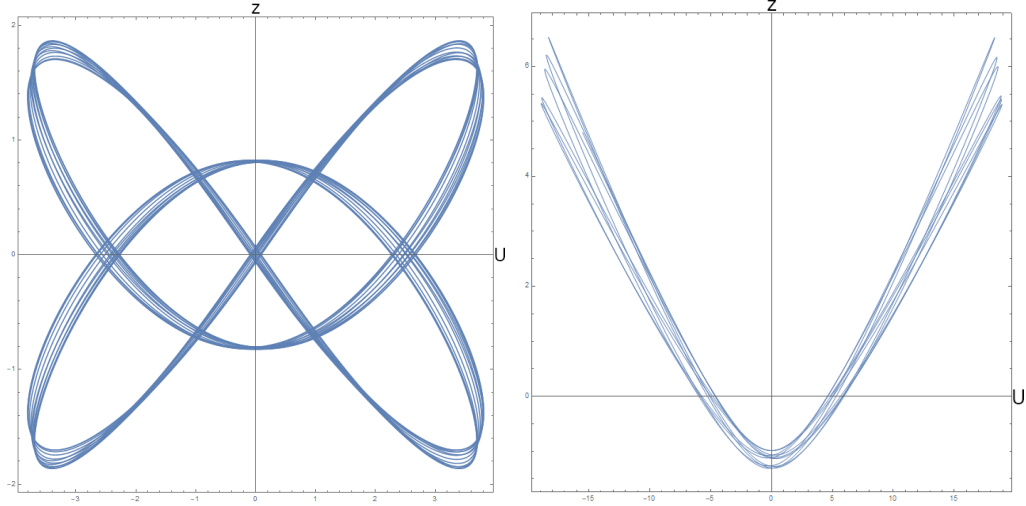
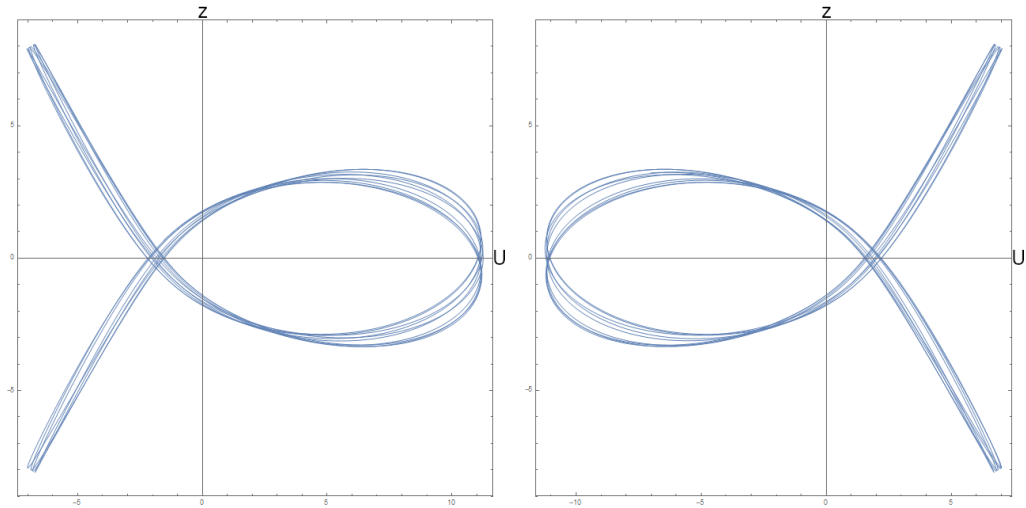


Figura 4.7: Secciones $z = 0$ ampliadas cerca del origen de cinco órbitas en diferentes valores de energía (Mathematica).

De este modo, cuando $E = 2$, observamos que la separatriz que pasaba por el origen ha sido reemplazada por una banda estocástica, lo que indica la presencia de caos.



(a) Órbita antifish con $E = 1.5$ que pasa por $U = 0$ y $p_U = 1.4$. (b) Órbita banana con $E = 3.0$ que pasa por $U = 4.8$ y $p_U = 1.6$.



(c) Órbita fish con $E = 2.5$ que pasa por $U = -1.8$ y $p_U = 1.25$. (d) Órbita fish con $E = 2.5$ que pasa por $U = 1.8$ y $p_U = 1.25$.

Figura 4.8: Diferentes ejemplos de órbitas de tipo boxlet en el plano (U, z) (Mathematica).

El aumento de energía provoca que las órbitas de tipo caja comiencen a desaparecer y que sean reemplazadas por órbitas con alto orden de resonan-

cia llamadas *órbitas de caja cerrada* (en inglés *boxlets*). Este fenómeno ocurre sobre todo con valores de q_Φ alejados de uno ya que para valores cercanos el potencial es esféricamente simétrico y por tanto el problema es integrable.

El tipo de órbitas boxlets se caracterizan por:

- No pasar de forma arbitraria cerca del centro del potencial.
- Tener formas muy dispares que generan diferentes subtipos de las mismas: *banana* (sub-figura 4.8(b)), *antibanana*, *fish* (sub-figuras 4.8(c) y 4.8(d)), *antifish* (sub-figura 4.8(a)), *pretzel*, *antipretzel*, etc.

Concretamente, en nuestro potencial, este tipo de órbitas aparecen en la sección de Poincaré como islas resonantes (señaladas en las sub-figuras 4.6(b), 4.6(d) y 4.6(e)). Donde las islas más exteriores corresponden a las órbitas banana y las islas interiores con las de tipo fish y antifish. También se observan otros tipos de islas resonantes pero dichas órbitas boxlet carecen de denominación particular.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha conseguido aplicar la mecánica Hamiltoniana al movimiento de estrellas en galaxias. Para ello, tras haber introducido los conceptos necesarios para su entendimiento, se ha enunciado el Principio Fundamental de la Dinámica en el que se basa y se han desarrollado las ecuaciones que definen dicho movimiento hamiltoniano.

Tras aplicar los conceptos de dicha mecánica para describir el movimiento de órbitas en potenciales centrales estáticos y con simetría axial, se ha definido un potencial logarítmico con simetría axial y se ha realizado un estudio tanto de los modos normales de sus órbitas como de su estructura del espacio de fases mediante secciones de Poincaré. Para ello, se ha realizado una adimensionalización del hamiltoniano con dicho potencial logarítmico.

Gracias a estos estudios se ha podido concluir que con órbitas con poca energía podemos realizar aproximaciones que se pueden resolver analíticamente y que a medida que aumenta la energía nos encontramos con variados tipos de órbitas e incluso con la aparición de caos.

En lo personal, este trabajo me ha permitido ver como las matemáticas al relacionarse con otras disciplinas como la física y la informática permiten tanto describir fenómenos de forma teórica como experimentar con dichos modelos extrayendo nuevas conclusiones.

Bibliografía

- [1] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics: Second Edition*. Springer-Verlag, 1997.
- [2] G. Contopoulos. *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*. Springer Science and Business Media, 2013.
- [3] J. D'Alembert. *Traité de dynamique*. Chez David, Libraire, Paris, 1743.
- [4] L. Euler. *Methodus inveniendi líneas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Marcum-Michaellem Bosquet e Socios, 1744.
- [5] B. Janssen. *Mecánica Analítica*. Departamento de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada, Campus de Fuente Nueva.
- [6] G. G. Kuzmin. *Astron. Zh.* 1997.
- [7] A. Luque. *Introducción a la dinámica de aplicaciones del círculo y problemas relacionados*. Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya.
- [8] I. Newton. *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Jussu Societatis Regiæ ac Typis Joseph Streater, 1687.
- [9] A. Rañada. *Dinámica Clásica*. Alianza Universidad Textos, 1990.
- [10] T. Rowland. *Functional*. MathWorld, A Wolfram Web Resource created by Eric W. Weisstein.
- [11] A. Toomre. *Astrophysical Journal*. 1963.
- [12] M. Valluri y D. Merritt. *Torus Construction*. Department of Physics and Astronomy, Rutgers University, NJ.
- [13] P. Blanchard y E. Brüning. *Variational methods in Mathematical Physics*. Springer-Verlag, 1992.

- [14] J. Binney y S. Tremaine. *Galactic Dynamics: Second Edition*. Princeton University Press, 2008.

A. Teorema de Liouville-Arnold

La versión del teorema de Liouville-Arnold que aquí se presenta está extraída del libro "Mathematical Methods of Classical Mechanics" [1] y para su comprensión es necesario un cierto conocimiento sobre variedades topológicas.

Por dicho motivo, antes de enunciar el teorema se indican las siguientes definiciones:

- Una *variedad simpléctica* es un par (M, w) donde M es una variedad diferenciable y w es una 2-forma cerrada.
- Un *conjunto de nivel* M_k para una función $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ con X un conjunto es el subconjunto de puntos x de X tal que $F(x) = k$.
- El *corchete de Poisson* es un operador de la mecánica hamiltoniana que se define sobre el espacio de fases del sistema usando las coordenadas canónicas (q_i, p_i) tal que dadas dos funciones $f(p_i, q_i, t)$ y $g(p_i, q_i, t)$:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

- Se dice que dos funciones f y g se encuentran en *involución mutua* si su corchete de Poisson se anula:

$$\{f, g\} = 0.$$

Teorema A.1. (de Liouville-Arnold) Sean n funciones F_1, \dots, F_n en involución mutua en una variedad simpléctica de $2n$ dimensiones

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Consideramos un conjunto de niveles de las funciones F_i

$$M_f = \{x : F_i(x) = f_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Suponiendo que las n funciones F_i son independientes en M_f (es decir, las n 1-formas dF son linealmente independientes en cada punto de M_f).

Entonces:

1. M_f es una variedad suave, invariante bajo el flujo de fases con función hamiltoniana $H = F_1$.
2. Si la variedad M_f es compacta y conexa, entonces existe un difeomorfismo entre ella y un toro n -dimensional T^n .
3. El flujo de fases con la función hamiltoniana H determina un movimiento cuasiperiódico en M_f , es decir, en coordenadas angulares $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ tenemos que

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \omega = \omega(f)$$

4. Las ecuaciones canónicas con función hamiltoniana H pueden ser integradas mediante cuadraturas.

La demostración de las tres primeras conclusiones del teorema se puede encontrar en las páginas 273-278 del libro anteriormente mencionado [1].

B. Orbitas cuasiperiódicas en un toro T^n

En este anexo sobre la dinámica hamiltoniana comentaremos algunos aspectos mencionados en [1] y [12] de la característica de las orbitas cuasiperiódicas de estar restringidos a toros n -dimensionales.

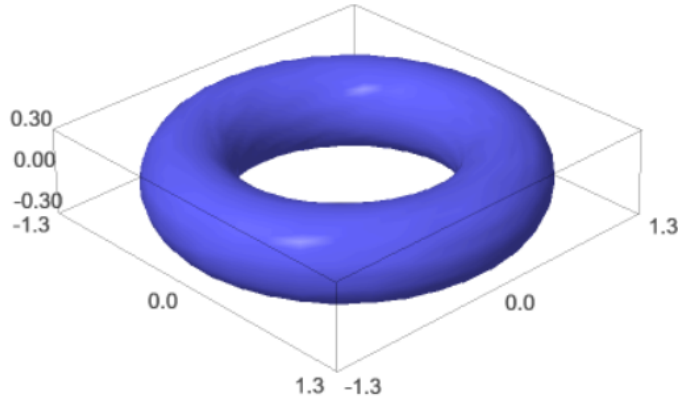


Figura B.1: Toro en un espacio de tres dimensiones (SageMath).

Empezamos definiendo las *variables de ángulo-acción* (θ_i, J_i) del sistema, donde θ_i son las coordenadas conjugadas llamadas *ángulos* y J_i los momentos asociados (*acciones*). Suponiendo que dichos momentos J_i sean integrales primeras del movimiento, las ecuaciones del movimiento de Hamilton quedan:

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} \equiv \Omega_i(J_i)$$

con $\Omega_i(J_i) = \frac{\partial H}{\partial J_i}$ una constante.

Lo que nos indica que el hamiltoniano es independiente de los ángulos θ_i (es

decir, $H = H(J)$ y que podemos resolver las ecuaciones de Hamilton como funciones del tiempo:

$$\boxed{\theta_i(t) = \Omega_i(J_i)t + \theta_i(0)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Las trayectorias serán periódicas en cada una de las variables angulares θ_i y deberán restringirse a los valores $0 < \theta_i \leq 2\pi$. De tal manera que las acciones J_i definen las áreas de la sección transversal de un toro, los θ_i la posición sobre el mismo y los $\Omega_i(J_i)$ la frecuencia del movimiento sobre cada una de las secciones transversales del toro. Este tipo de toros se suelen denominar *toros invariantes* ya que un punto que se encuentra en dicho toro permanecerá en él en todo momento.

Generalmente la aplicación entre las coordenadas canónicas y las variables de ángulo-acción será diferente para cada órbita y no existirá para aquellas trayectorias que no respeten n integrales del movimiento. La traslación uniforme de una órbita regular en su toro implica que el movimiento en cualquier coordenada canónica es cuasiperiódico:

$$x(t) = \sum_k X_k(J) e^{i(\sum_{j=1}^n m_{kj} \Omega_j)t}$$

$$p(t) = \sum_n P_n(J) e^{in(\sum_{j=1}^n m_{kj} \Omega_j)t}$$

donde m_{kj} son enteros y $X_n(J)$ y $V_n(J)$ son las amplitudes espectrales de Fourier.

C. Otros potenciales con simetría axial

En este anexo vamos a detallar brevemente algunos potenciales simples que sirven para representar el movimiento en galaxias con simetría axial. Estos se pueden dividir en potenciales en discos finos y potenciales en sistemas aplanados.

C.1. Potenciales en discos finos

Potencial de Kuzmin: El primer par de ecuaciones potencial-densidad de masa que vamos a tratar las introdujo Kuzmin en 1956 [6]. Su expresión es la siguiente (con $M(R)$ la masa interior a un radio R):

$$\Phi_K(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}}, \quad \text{con } a \geq 0. \quad (\text{C.1})$$

Este potencial se asemeja a un *potencial de masa puntual* $\Phi(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + z^2}}$ en todo punto $z \neq 0$ (por tanto, tiene densidad cero en (R, z)): ya que para $z > 0$, (C.1) es equivalente al potencial creado por una masa puntual M situada en $(R, z) = (0, -a)$, mientras que si $z < 0$, C.1 es equivalente al potencial de una masa puntual M ubicado en $(R, z) = (0, a)$.

Por lo tanto, el potencial tiene densidad cero en cualquier punto con $z \neq 0$, es decir, $\nabla^2 \Phi_K$ cumple la ecuación de Laplace en todos los puntos menos en el plano $z = 0$. Aplicando el teorema de Gauss, se obtiene que el potencial Φ_K se genera con la densidad superficial (disco de grosor cero)

$$\Sigma_K(R) = \frac{aM}{2\pi(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

Potencial de Toomre: En 1962, Toomre [11] derivó el potencial de Kuzmin y obtuvo una familia de potenciales parametrizada por un número n .

$$\Phi_{T_n}(R, z) = \left(\frac{d}{da^2} \right)^{n-1} \Phi_K(R, z)$$

$$\Sigma_{T_n}(R) = \left(\frac{d}{da^2} \right)^{n-1} \Sigma_K(R)$$

Es sencillo observar que para $n = 1$ coincide con el potencial de Kuzmin. Además, la linealidad de la ecuación de Poisson garantiza que el resultado es un par de ecuaciones potencial-densidad de masa válido.

C.2. Potenciales en sistemas aplanados

Potencial de Miyamoto-Nagai: Este potencial depende de dos parámetros $a \geq 0$ y $b \geq 0$, que permiten que el potencial represente desde un disco infinitamente delgado con $a = 0$ (*potencial esférico de Plummer*) hasta un sistema esférico $b = 0$ (potencial de Kuzmin).

$$\Phi_M(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}}, \quad a \geq 0$$

$$\rho_M(R) = \left(\frac{b^2 M}{4\pi} \right) \frac{aR^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2})(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}{(R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2)^{5/2} (z^2 + b^2)^{3/2}}$$

Potencial de Satoh: De forma similar a Toomre, en 1980. Satoh derivó respecto a b^2 el potencial de Miyamoto-Nagai y obtuvo una familia de potenciales parametrizada por el número n .

$$\Phi_{S_n}(R, z) = \left(\frac{d}{db^2} \right)^{n-1} \Phi_M(R, z)$$

$$\rho_{S_n}(R) = \left(\frac{d}{db^2} \right)^{n-1} \rho_M(R)$$

De la misma manera, la linealidad de la ecuación de Poisson garantiza que el resultado es un par de ecuaciones potencial-densidad de masa válido.

El **potencial logarítmico** tratado a lo largo del trabajo también sería un potencial de sistemas aplanados. [14]